Jour 15

Naoko Ferreira-Redier

15 décembre 2025

Problème 15. On considère l'équation

$$2a^n + 3b^n = 4c^n, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

La partie droite est un multiple de 4, donc la partie gauche doit aussi être un multiple de 4.

Supposons b impair. Alors b^n est impair, donc $3b^n$ est impair. Comme $2a^n$ est pair, on a

$$2a^n + 3b^n = \text{pair} + \text{impair} = \text{impair},$$

ce qui est impossible puisque l'on doit obtenir un multiple de 4. Donc b est pair.

Si b est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = 2k$. On a alors

$$3b^n = 3(2k)^n.$$

Pour $n \geq 2$, on a $4 = 2^2$.

2^2 divise 2^n, donc 2^n est un multiple de 4. Par conséquent, $2a^n$ doit aussi être un multiple de 4, ce qui implique que a est pair.

On a donc a, b, c pairs. On écrit alors

$$a = 2a', \quad b = 2b', \quad c = 2c'.$$

En remplaçant,

$2(2\text{a'})^n + 3(2b')^n = 4(2c')^n$. En factorisant,

$$2^n\big(2(a')^n + 3(b')^n\big) = 2^n\big(4(c')^n\big),$$

d'où

$$2(a')^n + 3(b')^n = 4(c')^n.$$

On peut faire ce raisonnement à l'infini, ce qui est impossible pour des entiers non nuls. Ainsi, la seule solution est

$$(a, b, c) = (0, 0, 0).$$

Cas $n = 1$. L'équation devient

$$2a + 3b = 4c,$$

qui admet une infinité de solutions entières.

Solution : $n = 1$